

# 基于衍生品投资的DC型养老金计划均衡投资策略\*

王佩<sup>1</sup>, 陈峥<sup>2</sup>, 张玲<sup>1</sup>

1. 广东金融学院经济与贸易学院, 广东 广州 510521
2. 中山大学管理学院, 广东 广州 510275

**摘要:** 研究均值-方差准则下可投资衍生品的确定缴费型养老金计划(DC型养老金计划)的均衡投资策略。具体地, DC型养老金计划的代表性参与者不仅可以投资于一个无风险资产和一支股票, 还可以投资一个衍生品, 其中股票的价格过程由随机波动率模型描述。在博弈论框架下, 利用随机最优控制方法分别得到了有衍生品投资和无衍生品投资情形下的均衡投资策略和相应均衡有效前沿的解析式。最后, 数值算例表明随机波动率和风险溢价对均衡有效前沿有显著影响, 并发现有衍生品投资情形下的均衡有效前沿总是优于无衍生品投资情形下的均衡有效前沿。

**关键词:** 衍生品; 确定缴费型养老金计划(DC型养老金计划); 均衡投资策略; 随机波动率

**中图分类号:** O224 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2021)03-0147-12

## Equilibrium investment strategy for a DC pension plan with derivative trading

WANG Pei<sup>1</sup>, CHEN Zheng<sup>2</sup>, ZHANG Ling<sup>1</sup>

1. School of Economics and Trade, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510521, China
2. Sun Yat-sen Business School, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China

**Abstract:** The equilibrium investment strategy for a DC pension plan with derivative trading under the mean-variance criterion is considered. That is to say, a representative member of the DC pension plan is allowed to invest not only in a risk-free asset and a stock, but also in a derivative. The stock price is described by a stochastic volatility model. Within the game theoretic framework, the analytic expressions of the equilibrium investment strategies and the corresponding equilibrium efficient frontiers are obtained in two cases, with and without the derivative asset. Finally, numerical examples show that the stochastic volatility and risk premium have significant impact on the equilibrium efficient frontiers, and the equilibrium efficient frontier of the case with derivative is always better than the equilibrium efficient frontier of the case without derivative.

**Key words:** derivatives; DC pension plan; equilibrium investment strategy; stochastic volatility

出生率降低和寿命延长使得大多数国家养老金制度面临着越来越严峻的挑战。Poterba等<sup>[1]</sup>和Blake等<sup>[2]</sup>指出为应对养老金支付危机, 保证养老保障体系的可持续性, 越来越多国家的养老金模式由确定收

\* 收稿日期: 2020-09-16 录用日期: 2020-11-05 网络首发日期: 2021-01-15

**基金项目:** 国家自然科学基金(71971070, 71601055, 72001219); 中国博士后科学基金(2018M641594); 广东省自然科学基金面上项目(2020A1515010419, 2020A1515110606); 广东省普通高校青年创新人才类项目(2019WQNCX090)

**作者简介:** 王佩(1989年生), 女; 研究方向: 动态资产配置与养老金融等; E-mail: wangpei89@gdudf.edu.cn

**通信作者:** 张玲(1979年生), 女; 研究方向: 资产配置、风险管理、养老金融等; E-mail: zhangl99@gdudf.edu.cn

益型养老金计划(以下简称DB型养老金计划)转变为确定缴费型养老金计划(以下简称DC型养老金计划)。这是因为,DC型养老金计划的缴费是预先确定的,养老金计划参与者退休后所能领取到的金额取决于积累期内养老金账户的投资收益。相应地,投资风险和长寿风险也从养老金计划的发起人转移到参与者身上。从这个意义上讲,DC型养老金计划有效的投资管理和风险控制对于参与者维持退休后的生活水平具有重要意义。近20年来,也出现了大量关于DC型养老金计划最优投资管理的研究。这些研究按照优化准则可划分为两大类:一类是以期望效用最大化为优化准则,如Battocchio等<sup>[3]</sup>得到了常数绝对风险厌恶效用(CARA)下DC型养老金计划的最优投资策略; Cairns等<sup>[4]</sup>研究了常数相对风险厌恶效用(CRRA)下DC型养老金计划的最优投资策略; Chen等<sup>[5]</sup>研究了DC型养老金计划的预期S-型效用最大化问题;另一类采用了均值-方差准则,如Yao等<sup>[6]</sup>、Guan等<sup>[7]</sup>以及Zhang等<sup>[8]</sup>研究了均值-方差准则下DC型养老金计划的最优投资策略。

上述关于DC型养老金计划最优投资问题的研究有两个方面值得拓展。一方面,以上文献多采用几何布朗运动模型刻画金融市场中风险资产的价格过程,且风险资产的价格波动为常数或关于时间的确定函数。然而许多实证研究表明股票价格的波动率是随机的而非确定的<sup>[9-10]</sup>。于是, Gao<sup>[11]</sup>、Guan等<sup>[12]</sup>和邓丽梅等<sup>[13]</sup>在效用最大化准则下分别利用Constant Elasticity of Variance(CEV)模型、Heston随机波动率模型和仿射平方根随机模型研究了具有随机波动率的DC型养老金计划的最优投资策略。另一方面,上述文献中均值-方差准则下DC型养老金计划的最优投资策略是时间不一致的,即在初始时刻得到的最优投资策略在未来时刻不再是最优的。这是因为均值-方差目标函数中的方差项不满足期望迭代性质, Bellman最优性原则不再成立。因此,在均值-方差准则下得到的最优投资策略只在初始时刻是最优的,也称为预先承诺策略。然而,投资策略的时间一致性是理性决策者的基本要求。特别对于投资期限通常为三、四十年的DC型养老金计划而言,如果投资策略缺乏时间一致性,DC型养老金计划的投资收益可能会遭受意想不到的损失。DC型养老金计划的决策者更偏好对每个时间点都是最优的时间一致策略,而不是仅在初始时间最优的预先承诺策略。因此,在Björk等<sup>[14]</sup>提出的纳什均衡分析框架下,许多学者试图通过求解扩展的Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程系统研究均值-方差准则下DC型养老金计划的时间一致性投资策略(也称均衡策略)<sup>[15-17]</sup>。

现有DC型养老金计划时间一致投资策略问题的研究中,风险资产的价格过程一般由几何布朗运动刻画,其瞬时收益率和波动率设定为常数。然而,近年金融市场的现状表明风险资产的波动率会受到政治、经济、突发灾难事件等不确定因素的极大影响,风险资产的波动率是时变而非确定的。在长达几十年的投资期限中考虑波动率随机变化对DC型养老金计划均衡投资策略的影响更贴近金融市场实际,一些学者也开始这方面的探索<sup>[18-19]</sup>。另外,作为风险对冲的有力工具,衍生品在金融投资实践中已是必备选项。然而DC型养老金计划投资决策问题还较少考虑此类资产。但是,由于衍生品在对冲金融风险方面的有效性,衍生品的投资已引起了广泛关注。近10年来,一些学者开始关注含有衍生品的最优投资组合问题<sup>[20-22]</sup>。根据新加坡交易所2015年1月6日发布报告,2014年证券交易量下降了25%,而衍生品交易量则升至历史新高。过去10年来,养老金投资市场中衍生品的投资也越来越多。2012年英国国家养老基金协会(NAPF)年度调查显示,57%参与者的养老金计划包含衍生品。此外,2016年全球养老金资产研究报告显示,截至2015年底,全球七大市场(澳大利亚、加拿大、日本、荷兰、瑞士、英国和美国)的平均全球资产配置比例为44%股票、29%债券、3%现金和24%其他资产,其中其他资产主要为衍生品。衍生品在养老金投资市场上越来越流行,相关研究也正在逐步展开, Zeng等<sup>[23]</sup>研究了模型不确定下基于衍生品投资的DC型养老金计划的稳健最优投资策略。

基于上述研究进展,本文拟在风险资产波动率随机变化且包含衍生品的金融市场中,研究均值-方差准则下DC型养老金计划的时间一致投资策略。金融市场中包含一个无风险资产、一支股票和一个衍生品。股票的价格过程服从一个随机波动率模型。在Björk等<sup>[14]</sup>提出的纳什均衡分析框架下,通过求解相应扩展的HJB方程系统,得到有衍生品投资和无衍生品投资情形下DC型养老金计划的均衡投资策略和均衡有效前沿。最后用数值算例分析了随机波动率和风险溢价对均衡有效前沿的影响。本文的主要贡献:(i)在均值-方差准则下构建了具有衍生品投资的DC型养老金计划投资组合模型;(ii)我们发现,衍生

品可以显著提高DC型养老金计划的投资绩效, 投资于衍生品、无风险资产和股票的均衡有效前沿远远优于投资于无风险资产和股票的均衡有效前沿, 因此衍生品是DC型养老金计划参与者提高投资收益的一种可行工具。

## 1 模型构建与求解

我们考虑DC型养老金计划的代表性参与者, 于0时刻开始工作,  $T > 0$ 时刻退休。在工作期间, 他领取随机的工资, 并连续不断地按照固定比例缴纳工资的一部分到自己的养老金账户。为了维持退休后的生活水平, 这个代表性参与者将其养老金账户中的财富投资到金融市场以增加自己养老金账户的金额。假设金融市场无摩擦, 不考虑交易成本。

设  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, P)$  是一个赋流的完备概率空间, 其中  $\mathcal{F}_t$  表示直到  $t$  时刻投资者可获得的所有信息,  $[0, T]$  是一个固定有限的投资区间。假设本文中的所有随机过程都是此赋流概率空间上的适应过程。

### 1.1 金融市场

金融市场上存在三种资产: 一个无风险资产 (现金或银行账户)、一支股票和一个衍生品。无风险资产的价格过程  $S_0(t)$  满足下面的微分方程

$$\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} = rdt, S_0(0) = 1, \quad (1)$$

其中  $r > 0$  表示无风险利率。股票的价格过程  $S(t)$  服从下面的随机微分方程

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r + \lambda_1 v(t))dt + \sqrt{v(t)} dW_s(t), S(0) = s_0. \quad (2)$$

股票收益的方差  $v(t)$  满足平方根过程

$$dv(t) = \kappa(\delta - v(t))dt + \sigma_v \sqrt{v(t)} (\rho_v dW_s(t) + \sqrt{1 - \rho_v^2} dW_v(t)), v(0) = v_0, \quad (3)$$

其中  $\lambda_1$  是扩散风险  $W_s(t)$  的溢价, 瞬时方差过程  $v(t)$  的长期均值为  $\delta > 0$ , 均值回复速率为  $\kappa > 0$ , 波动率为  $\sigma_v > 0$ ,  $\rho_v \in (-1, 1)$  为股票价格与波动率之间的相关系数,  $W_s(t)$  和  $W_v(t)$  是两个相互独立的标准一维布朗运动。并且为了确保过程  $v(t)$  是几乎处处非负的, 假设  $2\kappa\delta \geq \sigma_v^2$  成立。

DC型养老金计划参与者除了可投资无风险资产和股票外, 还可投资以股票为标的资产的衍生品。参照Liu等<sup>[20]</sup>, 假设衍生品在  $t$  时刻的价格为  $O(t, S(t), v(t))$  (下文均简写为  $O(t)$ ), 价格  $O(t)$  取决于标的股票价格  $S(t)$  和股票的波动率。受Liu等<sup>[20]</sup> 和Escobar等<sup>[21]</sup> 的启发, 利用Itô引理和偏微分方程基本原理, 我们发现  $O(t, S(t), v(t))$  满足下面的随机微分方程

$$\begin{aligned} dO(t) = & rO(t)dt + (O_s S(t) + \sigma_v \rho_v O_v)(\lambda_1 v(t)dt + \sqrt{v(t)} dW_s(t)) \\ & + \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} O_v (\lambda_2 v(t)dt + \sqrt{v(t)} dW_v(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $O_s$  和  $O_v$  分别表示  $O(t, S(t), v(t))$  关于  $S(t)$  和  $v(t)$  的偏导数,  $\lambda_2$  是波动率风险  $W_v(t)$  的溢价。

### 1.2 财富过程

在DC型养老金计划中, 参与者连续不断地向其养老金账户缴纳固定比例  $\xi$  (8%或10%) 的工资金额。假设参与者的工资  $L(t)$  满足下面随机微分方程

$$\begin{cases} dL(t) = L(t) [\mu_L dt + \sigma_L (\lambda_1 v(t)dt + \sqrt{v(t)} dW_s(t))], \\ L(0) = l_0, \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\mu_L > 0$  为工资的预期增长率,  $\sigma_L > 0$  为工资的波动率。

为了使养老金保值增值, 参与者将其养老金账户的财富投资到金融市场。令  $\pi_s(t)$  和  $\pi_o(t)$  分别表示  $t$  时刻投资在股票和衍生品上的财富比例, 则  $1 - \pi_s(t) - \pi_o(t)$  为  $t$  时刻投资于无风险资产中的财富比例。称  $\boldsymbol{\pi} := \{\boldsymbol{\pi}(t) := (\pi_s(t), \pi_o(t))\}_{t \in [0, T]}$  为一个投资策略, 则在投资策略  $\boldsymbol{\pi}$  下参与者养老金账户的财富  $X^\pi(t)$  满足如下动态方程

$$\begin{cases} dX^\pi(t) = X^\pi(t) \left[ (1 - \pi_s(t) - \pi_o(t)) \frac{dS_o(t)}{S_o(t)} + \pi_s(t) \frac{dS(t)}{S(t)} + \pi_o(t) \frac{dO(t)}{O(t)} \right] + \xi L(t) dt, \\ = X^\pi(t) [r + \theta_s(t)(\lambda_1 v(t) dt + \sqrt{v(t)} dW_s(t)) + \theta_v(t)(\lambda_2 v(t) dt + \sqrt{v(t)} dW_v(t))] + \xi L(t) dt, \\ X^\pi(0) = x, \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_s(t) \\ \theta_v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{O_s S(t) + \sigma_v \rho_v O_v}{O(t)} \\ 0 & \frac{\sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} O_v}{O(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_s(t) \\ \pi_o(t) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$\theta_s(t)$  和  $\theta_v(t)$  分别表示参与者在扩散风险  $W_s(t)$  和波动率风险  $W_v(t)$  下的风险敞口, 即参与者暴露在扩散风险  $W_s(t)$  和波动率风险  $W_v(t)$  下的财富比例。这里需要满足非冗余条件  $\sqrt{1 - \rho_v^2} O_v \neq 0$ , 这意味着可以用衍生品对冲来自随机波动率的风险。为了简化分析, 本文主要研究风险敞口  $\theta_s(t)$  和  $\theta_v(t)$ 。

**定义 1** (容许策略) 如果一个投资策略  $\pi = \{\pi(t) := (\pi_s(t), \pi_o(t))\}_{t \in [0, T]}$  满足

(i)  $\pi_s(t)$  和  $\pi_o(t)$  是  $\mathcal{F}_t$ -循序可测的随机过程;

(ii)  $E \left[ \int_0^T v(t) (\pi_s^2(t) + \pi_o^2(t)) dt \right] < \infty$ ;

(iii) 对于任意  $(t, x, v, l) \in [0, T] \times \mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , 方程 (6) 的解是存在且唯一的。

则称  $\pi$  为容许策略。记  $\Pi$  为 DC 型养老金计划所有容许策略组成的集合。

### 1.3 优化问题与验证定理

DC 型养老金计划参与者希望退休时养老金账户中的金额越多越好, 同时投资风险越小越好。也就是说退休时刻养老金账户中财富水平达到最高且投资风险最低。DC 型养老金计划参与者的这一目标可用下面的均值-方差模型刻画

$$\begin{cases} J(t, x, v, l; \pi) = E_{t, x, v, l} [X^\pi(T)] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}_{t, x, v, l} [X^\pi(T)], \\ \sup_{\pi \in \Pi} \{J(t, x, v, l; \pi)\}, \end{cases} \quad (8)$$

其中  $E_{t, x, v, l}[\cdot] = E[\cdot | X^\pi(t) = x, v(t) = v, L(t) = l]$ ,  $\text{Var}_{t, x, v, l}[\cdot] = \text{Var}[\cdot | X^\pi(t) = x, v(t) = v, L(t) = l]$ ,  $\gamma$  代表 DC 型养老金计划参与者的风险厌恶程度。在优化问题 (8) 中由于方差项  $\text{Var}_{t, x, v, l} [X^\pi(T)]$  包含非线性项  $(E_{t, x, v, l} [X^\pi(T)])^2$ , 故方差项  $\text{Var}_{t, x, v, l} [X^\pi(T)]$  不满足期望迭代性质, Bellman 最优化原理不再成立, 从而优化问题 (8) 是时间不一致的。事实上, 优化问题 (8) 在任意  $t$  时刻的最优策略, 不一定是未来所有时刻  $s (> t)$  的最优策略。但理性决策者更希望找到时间一致性策略。近年来, 许多学者对时间不一致动态优化问题进行了研究。Björk 等<sup>[14]</sup> 将时间不一致动态优化问题定义为一个非合作博弈, 通过寻找纳什子博弈完美均衡解, 进一步得到时间不一致优化问题的时间一致策略。

本文将在 Björk 等<sup>[14]</sup> 提出的博弈论框架下求解时间不一致优化问题 (8), 并寻找其时间一致的均衡投资策略。下面首先定义优化问题 (8) 的均衡策略。

**定义 2** (均衡策略) 如果对一个容许策略  $\pi^*$  以及任意给定的  $\bar{\pi}_s, \bar{\pi}_o \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, (t, x, v, l) \in [0, T] \times \mathcal{O}$ , 有下式成立

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(t, x, v, l; \pi^*) - J(t, x, v, l; \pi_\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0,$$

其中  $\pi_\varepsilon$  为

$$\pi_\varepsilon(\tau, x', v', l') = \begin{cases} (\bar{\pi}_s, \bar{\pi}_o), & t \leq \tau \leq t + \varepsilon, (x', v', l') \in \mathcal{O}, \\ \pi^*(\tau, x', v', l'), & t + \varepsilon \leq \tau \leq T, (x', v', l') \in \mathcal{O}, \end{cases}$$

则称  $\pi^*$  是均衡策略。相应的均衡值函数定义为

$$V(t, x, v, l) = J(t, x, v, l; \pi^*).$$

下面运用 Björk 等<sup>[14]</sup>的结论推导优化问题 (8) 满足的扩展的 HJB 方程系统。定义函数  $F(y) = y - \frac{\gamma}{2}y^2$ ,  $G(y) = \frac{\gamma}{2}y^2$ , 则均衡值函数可表达为

$$\begin{aligned} V(t, x, v, l; \pi^*) &= E_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)] - \frac{\gamma}{2} \text{Var}_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)] \\ &= E_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T) - \frac{\gamma}{2}(X^{\pi^*}(T))^2] + \frac{\gamma}{2} [E_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)]]^2 \\ &= E_{t,x,v,l}[F(X^{\pi^*}(T))] + G(E_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)]). \end{aligned}$$

令

$$C^{1,2,2,2}([0, T] \times \mathcal{O}) = \{ \psi(t, x, v, l) \mid \psi(t, \cdot, \cdot, \cdot) \text{ 在 } [0, T] \text{ 上一阶连续可微, 且 } \psi(t, x, v, l) \text{ 分别关于 } x \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上, } v \text{ 在 } \mathbb{R}^+ \text{ 上, } l \text{ 在 } \mathbb{R}^+ \text{ 上二阶连续可微} \}.$$

对任意  $\psi(t, x, v, l) \in C^{1,2,2,2}([0, T] \times \mathcal{O})$ , 定义微分算子

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\pi \psi(t, x, v, l) &= \psi_t + \psi_x \left\{ x[r + \theta_s \lambda_1 v + \theta_v \lambda_2 v] + \xi l \right\} + \psi_v \kappa(\delta - v) + \psi_l l(\mu_L + \sigma_L \lambda_1 v) \\ &\quad + \frac{1}{2} \psi_{xx} x^2 (\theta_s^2 + \theta_v^2) v + \frac{1}{2} \psi_{vv} \sigma_v^2 v + \frac{1}{2} \psi_{ll} l^2 \sigma_L^2 v + \psi_{xv} xv (\sigma_v \rho_v \theta_s + \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} \theta_v) \\ &\quad + \psi_{xl} xlv \sigma_L \theta_s + \psi_{vl} vl \sigma_v \sigma_L \rho_v, \end{aligned} \tag{9}$$

其中  $\psi$  为  $\psi(t, x, v, l)$  的简写,  $\psi_t, \psi_x, \psi, \psi_{xx}, \psi_{vv}, \psi_{ll}, \psi_{xv}, \psi_{xl}, \psi_{vl}$  分别为  $\psi(t, x, v, l)$  关于相关变量的偏导数的简写, 且  $\theta_s, \theta_v$  分别为  $\theta_s(t), \theta_v(t)$  的简写。

根据 Björk 等<sup>[14]</sup>中扩展的 HJB 方程系统与相应验证定理, 我们可利用如下扩展的 HJB 方程系统和验证定理来求解优化问题 (8) 的均衡策略  $\pi^*$  和相应的均衡值函数  $V(t, x, v, l)$ 。

**定理 1** (验证定理) 假设存在实值函数  $V(t, x, v, l), g(t, x, v, l) \in C^{1,2,2,2}([0, T] \times \mathcal{O})$ , 满足如下的扩展 HJB 方程系统

$$\begin{cases} \sup_{\pi \in \Pi} \{ \mathcal{A}^\pi V(t, x, v, l) - \mathcal{A}^\pi (G \diamond g)(t, x, v, l) + \mathcal{H}^\pi g(t, x, v, l) \} = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ \mathcal{A}^{\pi^*} g(t, x, v, l) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ V(T, x, v, l) = x, \\ g(T, x, v, l) = x. \end{cases} \tag{10}$$

其中上式中第一个方程的极大值在  $\pi^*$  实现, 记  $G_y(y) = \frac{dG}{dy}(y) = \gamma y$ 。分别定义  $G \diamond g$  和  $\mathcal{H}^\pi g$  为

$$(G \diamond g)(t, x, v, l) = G(g(t, x, v, l)), \quad \mathcal{H}^\pi g = G_y(g(t, x, v, l)) \mathcal{A}^\pi g(t, x, v, l),$$

则  $g(t, x, v, l) = E_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)]$ ,  $\pi^*$  是优化问题 (8) 的均衡策略,  $V(t, x, v, l)$  是相应的均衡值函数。

**证明** 该定理的证明类似于 Björk 等<sup>[14]</sup>中定理 4.1 的证明, 这里省略。

### 1.4 优化问题 (8) 求解过程

在求解优化问题 (8) 的均衡策略与相应均衡值函数之前, 先化简扩展 HJB 方程系统 (10)。

**命题 1** 扩展 HJB 方程系统 (10) 可简化为

$$\begin{aligned} \sup_{\theta_s^*, \theta_v^*} \left\{ V_t + V_x \left\{ x[r + \theta_s^* \lambda_1 v + \theta_v^* \lambda_2 v] + \xi l \right\} + V_v \kappa(\delta - v) + V_l l(\mu_L + \sigma_L \lambda_1 v) + \frac{1}{2} V_{xx} x^2 (\theta_s^2 + \theta_v^2) v \right. \\ \left. + \frac{1}{2} V_{vv} \sigma_v^2 v + \frac{1}{2} V_{ll} l^2 \sigma_L^2 v - V_{xv} xv (\sigma_v \rho_v \theta_s + \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} \theta_v) + V_{xl} xlv \sigma_L \theta_s \right. \\ \left. + V_{vl} vl \sigma_v \sigma_L \rho_v - \frac{\gamma}{2} g_x^2 x^2 (\theta_s^2 + \theta_v^2) v - \frac{\gamma}{2} g_v^2 \sigma_v^2 v - \frac{\gamma}{2} g_l^2 l^2 \sigma_L^2 v - \gamma g_x g_v xv (\sigma_v \rho_v \theta_s + \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} \theta_v) \right. \\ \left. - \gamma g_x g_l vl \sigma_v \sigma_L \rho_v - \gamma g_v g_l vl \sigma_v \sigma_L \rho_v \right\} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} g_t + g_x \left\{ x[r + \theta_s^* \lambda_1 v + \theta_v^* \lambda_2 v] + \xi l \right\} + g_v \kappa(\delta - v) + g_l l(\mu_L + \sigma_L \lambda_1 v) + \frac{1}{2} g_{xx} x^2 \left[ (\theta_s^*)^2 + (\theta_v^*)^2 \right] v \\ + \frac{1}{2} g_{vv} \sigma_v^2 v + \frac{1}{2} g_{ll} l^2 \sigma_L^2 v - g_{xv} xv (\sigma_v \rho_v \theta_s^* + \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} \theta_v^*) + g_{xl} xlv \sigma_L \theta_s^* + g_{vl} vl \sigma_v \sigma_L \rho_v = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{cases} V(T, x, v, l) = x, \\ g(T, x, v, l) = x. \end{cases} \quad (13)$$

证明 根据 (9) 式定义的微分算子  $\mathcal{A}^\pi$ , 我们能得到

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\pi V(t, x, v, l) &= V_t + V_x \left\{ x[r + \theta_s \lambda_1 v + \theta_v \lambda_2 v] + \xi l \right\} + V_v \kappa(\delta - v) + V_l l (\mu_L + \sigma_L \rho_L \lambda_1 v + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_L^2} \lambda_2 v) \\ &\quad + \frac{1}{2} V_{xx} x^2 (\theta_s^2 + \theta_v^2) v + \frac{1}{2} V_{vv} \sigma_v^2 v + \frac{1}{2} V_{ll} l^2 \sigma_L^2 v + V_{xv} xv (\sigma_v \rho_v \theta_s + \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} \theta_v) \\ &\quad + V_{xl} xlv (\sigma_L \rho_L \theta_s + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_L^2} \theta_v) + V_{vl} vl \sigma_v \sigma_L (\rho_v \rho_L + \sqrt{1 - \rho_v^2} \sqrt{1 - \rho_L^2}) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\pi (G \diamond g)(t, x, v, l) &= \mathcal{A}^\pi G(g(t, x, v, l)) \\ &= G_y g_t + G_y g_x \left\{ x[r + \theta_s \lambda_1 v + \theta_v \lambda_2 v] + \xi l \right\} + G_y g_v \kappa(\delta - v) + G_y g_l l (\mu_L + \sigma_L \rho_L \lambda_1 v \\ &\quad + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_L^2} \lambda_2 v) + \frac{1}{2} [G_{yy} g_x^2 + G_y g_{xx}] x^2 (\theta_s^2 + \theta_v^2) v + \frac{1}{2} [G_{yy} g_v^2 + G_y g_{vv}] \sigma_v^2 v \\ &\quad + \frac{1}{2} [G_{yy} g_l^2 + G_y g_{ll}] l^2 \sigma_L^2 v + [G_{yy} g_x g_v + G_y g_{xv}] xv (\sigma_v \rho_v \theta_s + \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} \theta_v) \\ &\quad + [G_{yy} g_x g_l + G_y g_{xl}] xlv (\sigma_L \rho_L \theta_s + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_L^2} \theta_v) \\ &\quad + [G_{yy} g_v g_l + G_y g_{vl}] vl (\sigma_v \rho_v \theta_s + \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} \theta_v). \end{aligned}$$

此外, 还能得到

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\pi g(t, x, v, l) &= G_y(g(t, x, v, l)) \mathcal{A}^\pi g(t, x, v, l) \\ &= G_y \{ g_t + g_x \left\{ x[r + \theta_s \lambda_1 v + \theta_v \lambda_2 v] + \xi l \right\} + g_v \kappa(\delta - v) + g_l l (\mu_L + \sigma_L \rho_L \lambda_1 v + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_L^2} \lambda_2 v) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{xx} x^2 (\theta_s^2 + \theta_v^2) v + \frac{1}{2} g_{vv} \sigma_v^2 v + \frac{1}{2} g_{ll} l^2 \sigma_L^2 v + g_{xv} xv (\sigma_v \rho_v \theta_s + \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} \theta_v) \\ &\quad + g_{xl} xlv (\sigma_L \rho_L \theta_s + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_L^2} \theta_v) + g_{vl} vl \sigma_v \sigma_L (\rho_v \rho_L + \sqrt{1 - \rho_v^2} \sqrt{1 - \rho_L^2}) \} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\pi^*} g(t, x, v, l) &= g_t + g_x \left\{ x[r + \theta_s^* \lambda_1 v + \theta_v^* \lambda_2 v] + \xi l \right\} + g_v \kappa(\delta - v) + g_l l (\mu_L + \sigma_L \rho_L \lambda_1 v + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_L^2} \lambda_2 v) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{xx} x^2 [(\theta_s^*)^2 + (\theta_v^*)^2] v + \frac{1}{2} g_{vv} \sigma_v^2 v + \frac{1}{2} g_{ll} l^2 \sigma_L^2 v + g_{xv} xv (\sigma_v \rho_v \theta_s^* + \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} \theta_v^*) \\ &\quad + g_{xl} xlv (\sigma_L \rho_L \theta_s^* + \sigma_L \sqrt{1 - \rho_L^2} \theta_v^*) + g_{vl} vl \sigma_v \sigma_L (\rho_v \rho_L + \sqrt{1 - \rho_v^2} \sqrt{1 - \rho_L^2}). \end{aligned}$$

将  $\mathcal{A}^\pi V(t, x, v, l)$ ,  $\mathcal{A}^\pi (G \diamond g)(t, x, v, l)$ ,  $\mathcal{H}^\pi g(t, x, v, l)$ ,  $\mathcal{A}^{\pi^*} g(t, x, v, l)$  的表达式代入扩展 HJB 方程系统 (10) 得到 (11) ~ (12) 式。证毕

求解简化后的扩展 HJB 方程系统 (11) ~ (13), 即可得到优化问题 (8) 的均衡策略和相应的均衡值函数。具体结果由下面的定理给出。

**定理 2** 优化问题 (8) 的均衡风险敞口为

$$\theta_s^* = \frac{n_1(t) \lambda_1}{\gamma (\bar{n}_1(t))^2 x} - \frac{\bar{n}_2(t) \sigma_v \rho_v}{\gamma \bar{n}_1(t) x} - \frac{\bar{n}_3(t) \sigma_L l}{\gamma \bar{n}_1(t) x}, \quad \theta_v^* = \frac{n_1(t) \lambda_2}{\gamma (\bar{n}_1(t))^2 x} - \frac{\bar{n}_2(t) \sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2}}{\gamma \bar{n}_1(t) x}. \quad (14)$$

均衡策略  $\pi^*$  为

$$\pi_s^*(t) = \theta_s^*(t) - \frac{O_s S(t) + \sigma_v \rho_v O_v}{O(t)} \pi_v^*(t), \quad \pi_o^*(t) = \frac{O(t) \theta_v^*(t)}{\sigma_v \sqrt{1 - \rho_v^2} O_v}. \quad (15)$$

相应的均衡值函数为

$$V(t, x, v, l) = n_1(t) x + \frac{n_2(t)}{\gamma} v + \frac{n_3(t)}{\gamma} l + \frac{n_4(t)}{\gamma}. \quad (16)$$

同时, 在均衡策略  $\pi^*$  下的预期终端财富为

$$g(t, x, v, l) = E_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)] = \bar{n}_1(t)x + \frac{\bar{n}_2(t)}{\gamma}v + \frac{\bar{n}_3(t)}{\gamma}l + \frac{\bar{n}_4(t)}{\gamma}, \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} n_1(t) = \bar{n}_1(t) = e^{r(T-t)}, & n_2(t) = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\bar{n}_2(t)\Sigma}{2\kappa} (1 - e^{\kappa(t-T)}), \\ n_3(t) = \bar{n}_3(t) = \frac{\gamma\xi}{\mu_L - r} (e^{\mu_L(T-t)} - e^{r(T-t)}), \\ n_4(t) = \delta(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \left\{ \frac{\Sigma}{\kappa + \Sigma} \left[ (T-t) + \frac{e^{(\kappa+\Sigma)(t-T)} - 1}{\kappa + \Sigma} + \frac{e^{\kappa(t-T)} - 1}{\kappa} - \frac{e^{(2\kappa+\Sigma)(t-T)} - 1}{2\kappa + \Sigma} \right] \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} \left[ (T-t) - \frac{e^{\kappa(t-T)} - 1}{\kappa} \right] \right\}, \\ \bar{n}_2(t) = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\kappa + \Sigma} (1 - e^{(\kappa+\Sigma)(t-T)}), & \bar{n}_4(t) = \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\kappa\delta}{\kappa + \Sigma} \left[ (T-t) + \frac{(e^{(\kappa+\Sigma)(t-T)} - 1)}{\kappa + \Sigma} \right], \\ \Sigma = \sigma_v(\lambda_1\rho_v + \lambda_2\sqrt{1-\rho_v^2}). \end{cases} \quad (18)$$

**证明** 根据终端条件 (13), 假设函数  $V(t, x, v, l)$  和  $g(t, x, v, l)$  具有如下形式

$$\begin{cases} V(t, x, v, l) = n_1(t)x + \frac{n_2(t)}{\gamma}v + \frac{n_3(t)}{\gamma}l + \frac{n_4(t)}{\gamma}, & n_1(T) = 1, n_2(T) = n_3(T) = n_4(T) = 0, \\ g(t, x, v, l) = \bar{n}_1(t)x + \frac{\bar{n}_2(t)}{\gamma}v + \frac{\bar{n}_3(t)}{\gamma}l + \frac{\bar{n}_4(t)}{\gamma}, & \bar{n}_1(T) = 1, \bar{n}_2(T) = \bar{n}_3(T) = \bar{n}_4(T) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

对  $V(t, x, v, l)$  和  $g(t, x, v, l)$  关于  $t, x, v, l$  分别求一阶和二阶偏导数得到

$$\begin{cases} V_t = n_{1t}x + \frac{n_{2t}}{\gamma}v + \frac{n_{3t}}{\gamma}l + \frac{n_{4t}}{\gamma}, & V_x = n_1, & V_v = \frac{n_2}{\gamma}, & V_l = \frac{n_3}{\gamma}, & V_{xx} = V_{vv} = V_{ll} = V_{xv} = V_{xl} = V_{vl} = 0, \\ g_t = \bar{n}_{1t}x + \frac{\bar{n}_{2t}}{\gamma}v + \frac{\bar{n}_{3t}}{\gamma}l + \frac{\bar{n}_{4t}}{\gamma}, & g_x = \bar{n}_1, & g_v = \frac{\bar{n}_2}{\gamma}, & g_l = \frac{\bar{n}_3}{\gamma}, & g_{xx} = g_{vv} = g_{ll} = g_{xv} = g_{xl} = g_{vl} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

其中  $n_i, \bar{n}_i$  分别是  $n_i(t), \bar{n}_i(t)$  的简写,  $n_{it}, \bar{n}_{it}$  分别表示  $n_i(t), \bar{n}_i(t)$  关于  $t$  的一阶偏导数,  $i = 1, 2, 3, 4$ 。将 (20) 式中的各项偏导数代入 (11) ~ (12) 式, 得到

$$\begin{aligned} \sup_{\pi \in \Pi} \{ & n_{1t}x + \frac{n_{2t}}{\gamma}v + \frac{n_{3t}}{\gamma}l + \frac{n_{4t}}{\gamma} + n_1 \{ x[r + \theta_s\lambda_1v + \theta_v\lambda_2v] + \xi l \} + \frac{n_2}{\gamma}\kappa(\delta - v) + \frac{n_3}{\gamma}l(\mu_L + \sigma_L\lambda_1v) \\ & - \frac{\gamma}{2}\bar{n}_1x^2(\theta_s^2 + \theta_v^2)v - \frac{\bar{n}_2}{2\gamma}\sigma_v^2v - \frac{\bar{n}_3}{2\gamma}l^2\sigma_L^2v - \bar{n}_1\bar{n}_2xv(\sigma_v\rho_v\theta_s + \sigma_v\sqrt{1-\rho_v^2}\theta_v) \\ & - \bar{n}_1\bar{n}_3v\sigma_v\sigma_L\rho_v + \frac{\bar{n}_2\bar{n}_3}{\gamma}vl\sigma_v\sigma_L\rho_v \} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

和

$$\bar{n}_{1t}x + \frac{\bar{n}_{2t}}{\gamma}v + \frac{\bar{n}_{3t}}{\gamma}l + \frac{\bar{n}_{4t}}{\gamma} + \bar{n}_1 \{ x[r + \theta_s^*\lambda_1v + \theta_v^*\lambda_2v] + \xi l \} + \frac{\bar{n}_2}{\gamma}\kappa(\delta - v) + \frac{\bar{n}_3}{\gamma}l(\mu_L + \sigma_L\lambda_1v) = 0. \quad (22)$$

根据一阶最优条件, 对方程 (21) 分别关于  $\theta_s$  和  $\theta_v$  求导, 得到

$$\theta_s^* = \frac{n_1\lambda_1}{\gamma\bar{n}_1x} - \frac{\bar{n}_2\sigma_v\rho_v}{\gamma\bar{n}_1x} - \frac{\bar{n}_3\sigma_Ll}{\gamma\bar{n}_1x}, \quad \theta_v^* = \frac{n_1\lambda_2}{\gamma\bar{n}_1x} - \frac{\bar{n}_2\sigma_v\sqrt{1-\rho_v^2}}{\gamma\bar{n}_1x}. \quad (23)$$

将 (23) 式代入 (21) ~ (22) 式, 关于  $x, v, l$  及剩余项进行整理, 得到

$$\begin{aligned} x(n_{1t} + n_1r) + v \left[ \frac{n_{2t}}{\gamma} - \frac{n_2}{\gamma}\kappa - \frac{n_1\bar{n}_2\sigma_v(\lambda_1\rho_v + \lambda_2\sqrt{1-\rho_v^2})}{\gamma\bar{n}_1} + \frac{n_1^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{2\gamma\bar{n}_1} \right] + l \left[ \frac{n_{3t}}{\gamma} + \frac{n_3}{\gamma}\mu_L + n_1\xi \right] \\ + vl \left[ \frac{n_3\sigma_L}{\gamma}\lambda_1 - \frac{n_1\bar{n}_3\sigma_L}{\gamma\bar{n}_1}\lambda_1 \right] + \frac{n_{4t}}{\gamma} + \frac{n_4}{\gamma}\kappa\delta = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

和

$$x(\bar{n}_{1t} + \bar{n}_{1r}) + v \left[ \frac{\bar{n}_{2t}}{\gamma} - \frac{\bar{n}_2}{\gamma} (\kappa + \sigma_v(\lambda_1 \rho_v + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho_v^2})) + \frac{n_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{\gamma \bar{n}_1} \right] + l \left[ \frac{\bar{n}_{3t}}{\gamma} + \frac{\bar{n}_3}{\gamma} \mu_L + \bar{n}_1 \xi \right] + \frac{\bar{n}_{4t}}{\gamma} + \frac{\bar{n}_2}{\gamma} \kappa \delta = 0. \quad (25)$$

结合终端条件 (13) 式, (24) ~ (25) 式等价于如下方程

$$n_{1t} + n_{1r} = 0, \quad n_1(T) = 1, \quad (26)$$

$$n_{2t} - n_{2r} - \frac{n_1 \bar{n}_2 \sigma_v (\lambda_1 \rho_v + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho_v^2})}{\bar{n}_1} + \frac{n_1^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{2 \bar{n}_1^2} = 0, \quad n_2(T) = 0, \quad (27)$$

$$n_{3t} + n_{3r} \mu_L + \gamma n_1 \xi = 0, \quad n_3(T) = 0, \quad (28)$$

$$n_{4t} + n_{2r} \kappa \delta = 0, \quad n_4(T) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{n_3 \sigma_L}{\gamma} (\lambda_1 \rho_L + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho_L^2}) - \frac{n_1 \bar{n}_3 \sigma_L}{\gamma \bar{n}_1} (\lambda_1 \rho_L + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho_L^2}) = 0, \quad (30)$$

$$\bar{n}_{1t} + \bar{n}_{1r} = 0, \quad \bar{n}_1(T) = 1, \quad (31)$$

$$\bar{n}_{2t} - \bar{n}_{2r} (\kappa + \sigma_v (\lambda_1 \rho_v + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho_v^2})) + \frac{n_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{\bar{n}_1} = 0, \quad n_2(T) = 0, \quad (32)$$

$$\bar{n}_{3t} + \bar{n}_{3r} \mu_L + \gamma \bar{n}_1 \xi = 0, \quad \bar{n}_3(T) = 0, \quad (33)$$

$$\bar{n}_{4t} + \bar{n}_{2r} \kappa \delta = 0, \quad \bar{n}_4(T) = 0. \quad (34)$$

通过求解方程 (26) ~ (34) 式, 得到 (18) 式。证毕

**注 1** (均衡有效前沿) 根据定理 2 和均衡值函数的定义, 可得到

$$\text{Var}_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)] = \frac{2}{\gamma} \{ \text{E}_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)] - V(t, x, v, l) \} = \frac{1}{\gamma^2} N(t), \quad (35)$$

其中  $N(t) = 2[(\bar{n}_2(t) - n_2(t))v + (\bar{n}_3(t) - n_3(t))l + (\bar{n}_4(t) - n_4(t))]$ 。则

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{\text{Var}_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)]}}{\sqrt{N(t)}}. \quad (36)$$

从而有

$$\begin{aligned} \text{E}_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)] &= \bar{n}_1(t)x + \frac{\bar{n}_2(t)}{\gamma}v + \frac{\bar{n}_3(t)}{\gamma}l + \frac{\bar{n}_4(t)}{\gamma} \\ &= \bar{n}_1(t)x + \frac{\bar{n}_2(t)v + \bar{n}_3(t)l + \bar{n}_4(t)}{\sqrt{N(t)}} \sqrt{\text{Var}_{t,x,v,l}[X^{\pi^*}(T)]}. \end{aligned} \quad (37)$$

特别地, 在  $t = 0$  时刻有

$$\text{Var}_{0,x_0,v_0,l_0}[X^{\pi^*}(T)] = (\text{E}_{0,x_0,v_0,l_0}[X^{\pi^*}(T)] - \bar{n}_1(0)x_0)^2 \frac{N(0)}{(\bar{n}_2(0)v_0 + \bar{n}_3(0)l_0 + \bar{n}_4(0))^2}. \quad (38)$$

那么, 方程 (38) 就是优化问题 (8) 在  $t = 0$  时刻给定初始状态  $(x_0, v_0, l_0)$  下的均衡有效前沿, 其反映了均衡投资策略  $\pi^*$  下退休时刻财富  $X^{\pi^*}(T)$  的期望和方差之间的关系。显然均衡有效前沿 (38) 是均值-标准差平面中从点  $(\bar{n}_1(0)x_0, 0)$  发出的一条直线。

**注 2** (无衍生品投资) 如果在金融市场中投资时不考虑衍生品, 并将关于  $W_s(t)$  的风险敞口记为  $\tilde{\theta}_s(t)$ , 投资策略记为  $\tilde{\pi}_s(t)$ 。则优化问题 (8) 的均衡风险敞口和均衡投资策略为

$$\tilde{\theta}_s^*(t) = \tilde{\pi}_s^*(t) = \frac{m_1(t)\lambda_1}{\gamma(\bar{m}_1(t))^2 x} - \frac{\bar{m}_2(t)\sigma_v \rho_v}{\gamma \bar{m}_1(t)x} - \frac{\bar{m}_3(t)\sigma_L l}{\gamma \bar{m}_1(t)x}. \quad (39)$$

均衡值函数为

$$\tilde{V}(t, x, v, l) = m_1(t)x + \frac{m_2(t)}{\gamma}v + \frac{m_3(t)}{\gamma}l + \frac{m_4(t)}{\gamma}. \quad (40)$$

在均衡策略  $\pi^*$  下的预期终端财富为

$$\tilde{g}(t, x, v, l) = E_{t, x, v, l}[X^{\pi^*}(T)] = \bar{m}_1(t)x + \frac{\bar{m}_2(t)}{\gamma}v + \frac{\bar{m}_3(t)}{\gamma}l + \frac{\bar{m}_4(t)}{\gamma}, \quad (41)$$

其中

$$\begin{cases} m_1(t) = \bar{m}_1(t) = e^{r(T-t)}, m_2(t) = \frac{e^{\kappa t}}{2} \int_t^T (\lambda_1^2 - 2\bar{m}_2(s)\lambda_1\sigma_v\rho_v - (\bar{m}_2(s))^2\sigma_v^2(1-\rho_v^2))e^{-\kappa s} ds, \\ m_3(t) = \bar{m}_3(t) = \frac{\gamma\xi}{\mu_L - r} (e^{\mu_L(T-t)} - e^{r(T-t)}), m_4(t) = \kappa\delta \int_t^T m_2(s) ds, \\ \bar{m}_2(t) = \frac{\lambda_1^2}{\kappa + \lambda_1\sigma_v\rho_v} (1 - e^{-(\kappa + \lambda_1\sigma_v\rho_v)(T-t)}), \bar{m}_4(t) = \frac{\lambda_1^2\kappa\delta}{\kappa + \lambda_1\sigma_v\rho_v} \left[ T - t + \frac{e^{-(\kappa + \lambda_1\sigma_v\rho_v)(T-t)} - 1}{\kappa + \lambda_1\sigma_v\rho_v} \right]. \end{cases} \quad (42)$$

$t = 0$  时刻的均衡有效前沿为

$$\text{Var}_{0, x_0, v_0, l_0}[X^{\pi^*}(T)] = (E_{0, x_0, v_0, l_0}[X^{\pi^*}(T)] - \bar{m}_1(0)x_0)^2 \frac{\tilde{N}(0)}{(\bar{m}_2(0)v_0 + \bar{m}_3(0)l_0 + \bar{m}_4(0))^2}, \quad (43)$$

其中  $\tilde{N}(0) = 2[(\bar{m}_2(0) - m_2(0))v_0 + (\bar{m}_3(0) - m_3(0))l_0 + (\bar{m}_4(0) - m_4(0))]$ .

**证明** 当金融市场中不存在衍生品时, 参与者的财富过程为

$$\begin{cases} dX^{\pi}(t) = X^{\pi}(t) \left[ (1 - \tilde{\pi}_s(t)) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \tilde{\pi}_s(t) \frac{dS(t)}{S(t)} \right] + \xi L(t) dt \\ = X^{\pi}(t) \left[ r dt + \tilde{\pi}_s(\lambda_1 v(t) dt + \sqrt{v(t)} dW_s(t)) \right] + \xi L(t) dt, \\ X^{\pi}(0) = x_0. \end{cases} \quad (44)$$

此时, 优化问题 (8) 的扩展HJB方程系统为

$$\begin{aligned} \sup_{\tilde{\pi} \in \Pi} \{ & \tilde{V}_t + \tilde{V}_x \{ x[r + \tilde{\pi}_s \lambda_1 v] + \xi l \} + \tilde{V}_v \kappa (\delta - v) + \tilde{V}_l l (\mu_L + \sigma_L \lambda_1 v) + \frac{1}{2} \tilde{V}_{xx} x^2 \tilde{\pi}_s^2 v + \frac{1}{2} \tilde{V}_{vv} \sigma_v^2 v \\ & + \frac{1}{2} \tilde{V}_{ll} l^2 \sigma_L^2 v + \tilde{V}_{xv} x v \sigma_v \rho_v \tilde{\pi}_s + \tilde{V}_{xl} x l v \sigma_L \tilde{\pi}_s + \tilde{V}_{vl} v l \sigma_v \sigma_L \rho_v - \frac{\gamma}{2} \tilde{g}_x^2 x^2 \tilde{\pi}_s^2 v - \frac{\gamma}{2} \tilde{g}_v^2 \sigma_v^2 v \\ & - \frac{\gamma}{2} \tilde{g}_l^2 l^2 \sigma_L^2 v - \gamma \tilde{g}_x \tilde{g}_v x v \sigma_v \rho_v \tilde{\pi}_s - \gamma \tilde{g}_x \tilde{g}_l v l \sigma_v \sigma_L \rho_v - \gamma \tilde{g}_v \tilde{g}_l v l \sigma_v \sigma_L \rho_v \} = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_t + \tilde{g}_x \{ & x[r + \pi_s^* \lambda_1 v] + \xi l \} + \tilde{g}_v \kappa (\delta - v) + \tilde{g}_l l (\mu_L + \sigma_L \lambda_1 v) + \frac{1}{2} \tilde{g}_{xx} x^2 (\pi_s^*)^2 v \\ & + \frac{1}{2} \tilde{g}_{vv} \sigma_v^2 v + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ll} l^2 \sigma_L^2 v - \tilde{g}_{xv} x v \sigma_v \rho_v \pi_s^* + \tilde{g}_{xl} x l v \sigma_L \pi_s^* + \tilde{g}_{vl} v l \sigma_v \sigma_L \rho_v = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{cases} \tilde{V}(T, x, v, l) = x, \\ \tilde{g}(T, x, v, l) = x. \end{cases} \quad (47)$$

系统 (45) ~ (47) 的推导类似于命题 1 的证明, 此处省略。然后通过类似于定理 2 中的推导过程, 求解扩展HJB方程系统 (45) ~ (47), 即得到 (39) ~ (43) 式。证毕

## 2 敏感性分析

上一节得到了DC型养老金计划的均衡策略和均衡有效前沿, 为进一步清晰地展示随机波动率、风险溢价以及衍生品对DC型养老金计划均衡有效前沿的影响, 本节将通过数值分析与数值算例进行直观呈现。参考 Zeng 等<sup>[23]</sup>, 模型参数的取值设定为:  $r = 0.05, \kappa = 5, \delta = 0.13^2, \xi = 0.2, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -6, \mu_L = 0.08, \sigma_L = 0.5, \sigma_v = 0.25, \gamma = 0.5, \rho_v = -0.4, x_0 = 4, l_0 = 1, v_0 = 0.15^2, t = 0, T = 20$ 。

总体而言, 从图 1 和图 2 可明显看出, 投资于衍生品、无风险资产和股票情形的均衡有效前沿明显优于只投资无风险资产和股票情形的均衡有效前沿。这意味着在 DC 型养老金计划投资决策中纳入衍生品可以改善均衡有效前沿、降低 DC 型养老金计划的投资风险。

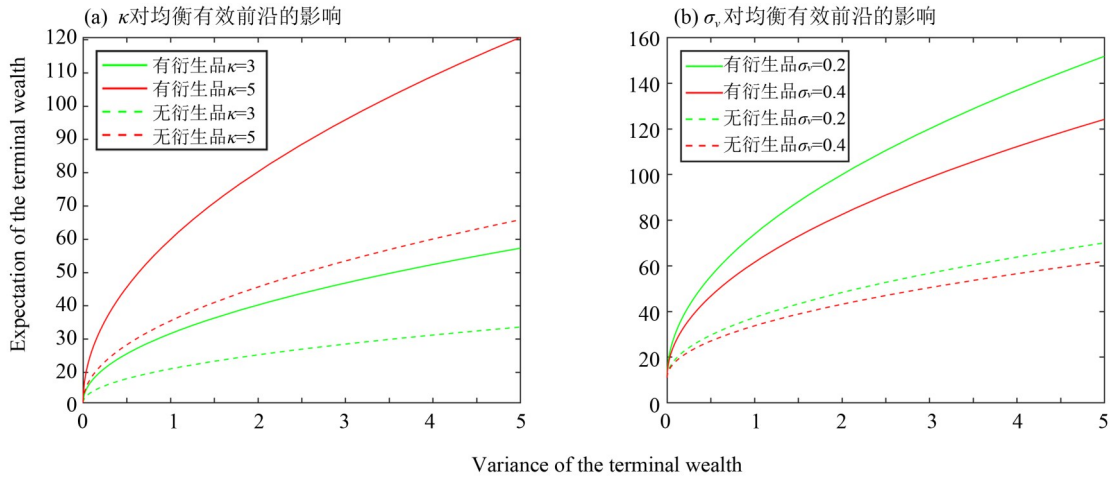


图 1 参数  $\kappa$  和  $\sigma_v$  对均衡有效前沿的影响

Fig. 1 The effect of parameters  $\kappa$  and  $\sigma_v$  on the equilibrium efficient frontier

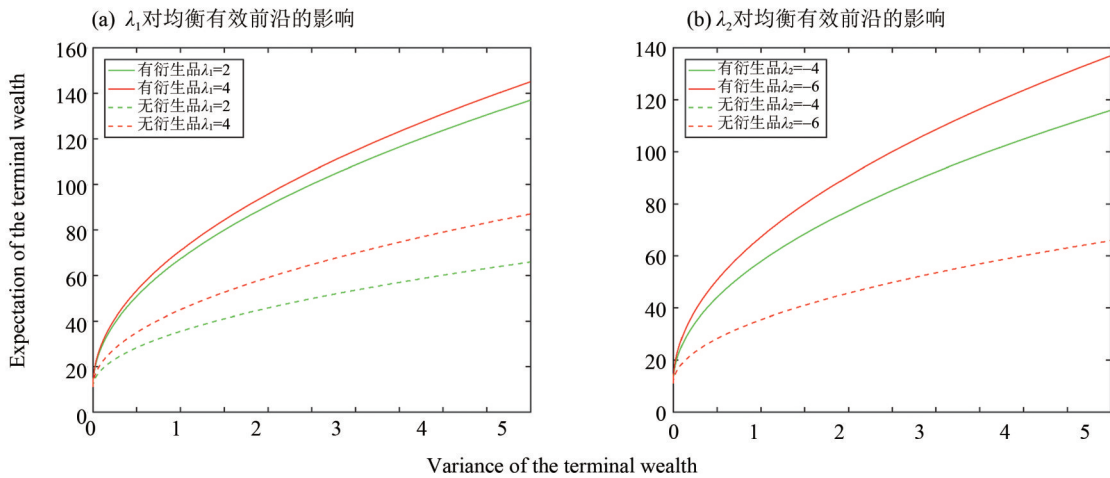


图 2 参数  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  对均衡有效前沿的影响

Fig. 2 The effect of parameters  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  on the equilibrium efficient frontier

图 1 显示了  $v(t)$  的均值回复速率  $\kappa$  和波动率  $\sigma_v$  对 DC 型养老金计划均衡有效前沿的影响。由图 1 (a) 可发现, 随着  $\kappa$  的增长,  $v(t)$  的不确定性越小, 在退休时财富的期望水平相同时, 退休时财富的方差越小, 也就是说投资风险降低。与之相反, 当  $\sigma_v$  变大时,  $v(t)$  的不确定性增大, 当退休时财富的期望水平相同时, 退休时财富的方差变大, 投资风险升高。

图 2 揭示了风险  $W_s(t)$  的溢价  $\lambda_1$  和风险  $W_v(t)$  的溢价  $\lambda_2$  对均衡有效前沿的影响。我们发现, 当方差固定时, 对于有衍生品交易情形, 均衡有效前沿随着  $\lambda_1$  的增大而上升、随着  $\lambda_2$  的增大而降低; 而对于无衍生品交易情形, 均衡有效前沿随  $\lambda_1$  的增大而上升, 而  $\lambda_2$  对均衡有效前沿无影响。由于  $\lambda_1$  的值为正,  $\lambda_2$  的值为负, 我们分析  $|\lambda_1|$  和  $|\lambda_2|$  对均衡有效前沿的影响。随着  $\lambda_1$  增大, 退休时财富的方差相同时, 退休时财富的期望更大, 均衡有效前沿上升。这主要是因为  $\lambda_1$  越大, 股票的预期收益率越大, 这有助于参与者通过承担相同的风险水平而获得更高的收益。 $|\lambda_2|$  越大, 意味着来自  $W_v(t)$  的风险越大, 这种风险可以由衍生品对冲, 而不能由股票对冲。因此, 在无衍生品情形中,  $\lambda_2$  的变化对均衡有效前沿没有影响, 因此图 2 (b) 中无衍生品情形下,  $\lambda_1 = -4$  与  $\lambda_2 = -6$  对应的均衡有效前沿重合。相反, 来自  $W_v(t)$  风险越大, 作为对冲工具的衍生品就越有用。因此,  $|\lambda_2|$  越大, 投资组合的风险减低, 从而提升均衡有效前沿。

## 4 结束语

本文研究了均值-方差准则下可投资衍生品的DC型养老金计划的均衡投资策略。根据 Björk 等<sup>[14]</sup>提出的博弈论思想, 得到优化问题满足的扩展 HJB 方程系统。通过求解扩展 HJB 方程系统得到均衡投资策略和相应均衡值函数的解析表达式。并进一步得到了无衍生品投资情形的均衡投资策略和相应均衡值函数的解析式。最后, 本文分析了随机波动率和风险溢价对均衡有效前沿的影响, 投资于衍生品、无风险资产和股票情形的均衡有效前沿明显优于只投资无风险资产和股票情形的均衡有效前沿, 说明投资衍生品可以有效地提高投资效率、降低投资组合风险。

### 参考文献:

- [1] POTERBA J, RAUH J, VENTI S, et al. Defined contribution plans, defined benefit plans, and the accumulation of retirement wealth [J]. *Journal of Public Economics*, 2007, 91: 2062–2086.
- [2] BLAKE D, WRIGHT D, ZHANG Y M. Age-dependent investing: optimal funding and investment strategies in defined contribution pension plans when members are rational life cycle financial planners [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2014, 38: 105–124.
- [3] BATTOCCHIO P, MENONCIN F. Optimal pension management in a stochastic framework [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004, 34(1): 79–95.
- [4] CAIRNS A J, BLAKE D, DOWD K. Stochastic lifestyling: Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2006, 30(5): 843–877.
- [5] CHEN Z, LI Z F, ZENG Y, et al. Asset allocation under loss aversion and minimum performance constraint in a DC pension plan with inflation risk [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2017, 75: 137–150.
- [6] YAO H, LAI Y, MA Q, et al. Asset allocation for a dc pension fund with stochastic income and mortality risk: A multi-period mean-variance framework [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2014, 54: 84–92.
- [7] GUAN G, LIANG Z. Mean-variance efficiency of DC pension plan under stochastic interest rate and mean-reverting returns [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2015, 61: 99–109.
- [8] ZHANG L, ZHANG H, YAO H X. Optimal investment management for a defined contribution pension fund under imperfect information [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2018, 79: 210–224.
- [9] FRENCH K R, SCHWERT G W, STAMBAUGH R F. Expected stock returns and volatility [J]. *Journal of Financial Economics*, 1978, 19(1): 3–29.
- [10] HOBSON D G, ROGERS L C G. Complete models with stochastic volatility [J]. *Mathematical Finance*, 1998, 8(1): 27–48.
- [11] GAO J W. Optimal investment strategy for annuity contracts under the constant elasticity of variance (CEV) model [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 45(1): 9–18.
- [12] GUAN G, LIANG Z. Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rate and stochastic volatility framework [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2014, 57: 58–66.
- [13] 邓丽梅, 谷爱玲, 伊博. 一类随机模型下DC养老金的最优投资策略[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2020, 59(5): 19–28.  
DENG L M, GU A L, YI B. Optimal investment strategy under a stochastic model for DC pension [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2020, 59(5): 19–28.
- [14] BJÖRK T, MURGOCI A. A general theory of Markovian time inconsistent stochastic control problems [J]. *Ssrn Electronic Journal*, 2010. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1694759>
- [15] HE L, LIANG Z. Optimal investment strategy for the DC plan with the return of premiums clauses in a mean-variance framework [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2013, 53(3): 643–649.
- [16] WU H, ZENG Y. Equilibrium investment strategy for defined-contribution pension schemes with generalized mean-variance criterion and mortality risk [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2015, 64: 396–408.
- [17] SUN J, LI Z, ZENG Y. Precommitment and equilibrium investment strategies for defined contribution pension plans under a

- jump-diffusion model [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2016, 67: 158-172.
- [18] ZHANG L, LI D, LAI Y. Equilibrium investment strategy for a defined contribution pension plan under stochastic interest rate and stochastic volatility [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, 368, 112536.
- [19] 李方超, 张成科, 朱怀念. Heston 模型下考虑工资风险和保费退还条款的 DC 型养老金时间一致性投资策略[J]. *系统管理学报*, 2020, 29(04): 617-628.
- LI F C, ZHANG C K, ZHU H N. Time-consistent investment strategy for DC pension with salary risk and premium refund clauses in Heston model [J]. *Journal of Systems and Management*, 2020, 29(04): 617-628.
- [20] LIU J, PAN J. Dynamic derivative strategies [J]. *Journal of Financial Economics*, 2003, 69(3): 401-430.
- [21] ESCOBAR M, FERRANDO S, RUBTSOV A. Robust portfolio choice with derivative trading under stochastic volatility [J]. *Journal of Bank and Finance*, 2015, 61: 142-157.
- [22] ESCOBAR M, FERRANDO S, RUBTSOV A. Dynamic derivative strategies with stochastic interest rates and model uncertainty [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2018, 86: 49-71.
- [23] ZENG Y, LI D, CHEN Z, et al. Ambiguity aversion and optimal derivative-based pension investment with stochastic income and volatility [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2018, 88: 70-103.

(责任编辑 冯兆永)